

1.2

函数及其表示

1.2.1 函数的概念

在初中我们已经学习过函数的概念，并且知道可以用函数描述变量之间的依赖关系。现在我们将进一步学习函数及其构成要素。下面先看几个实例。

(1) 一枚炮弹发射后，经过 26 s 落到地面击中目标。炮弹的射高^①为 845 m，且炮弹距地面的高度 h (单位：m) 随时间 t (单位：s) 变化的规律是

$$h = 130t - 5t^2. \quad (*)$$

这里，炮弹飞行时间 t 的变化范围是数集 $A = \{t \mid 0 \leq t \leq 26\}$ ，炮弹距地面的高度 h 的变化范围是数集 $B = \{h \mid 0 \leq h \leq 845\}$ 。从问题的实际意义可知，对于数集 A 中的任意一个时间 t ，按照对应关系 $(*)$ ，在数集 B 中都有唯一确定的高度 h 和它对应。

^① 射高是指斜抛运动中，物体飞行轨迹最高点的高度。



(2) 近几十年来，大气层中的臭氧迅速减少，因而出现了臭氧层空洞问题。图 1.2-1 中的曲线显示了南极上空臭氧层空洞的面积从 1979~2001 年的变化情况。

根据图 1.2-1 中的曲线可知，时间 t 的变化范围是数集 $A = \{t \mid 1979 \leq t \leq 2001\}$ ，臭氧层空洞面积 S 的变化范围是数集 $B = \{S \mid 0 \leq S \leq 26\}$ 。并且，对于数集 A 中的每

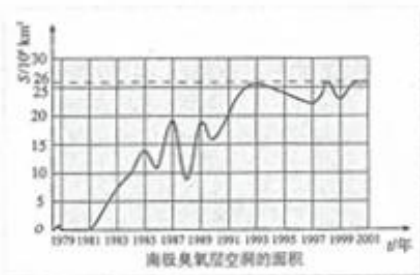


图 1.2-1

一个时刻 t ，按照图中曲线，在数集 B 中都有唯一确定的臭氧层空洞面积 S 和它对应。

(3) 国际上常用恩格尔系数^①反映一个国家人民生活质量的^①高低，恩格尔系数越低，生活质量越高。表 1-1 中恩格尔系数随时间(年)变化的情况表明，“八五”计划以来，我国城镇居民的生活质量发生了显著变化。

表 1-1 “八五”计划以来我国城镇居民恩格尔系数变化情况

时间(年)	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
城镇居民家庭 恩格尔系数 (%)	53.8	52.9	50.1	49.9	49.9	48.6	46.4	44.5	41.9	39.2	37.9

请你仿照(1)(2)描述表 1-1 中恩格尔系数和时间(年)的关系。



分析、归纳以上三个实例，变量之间的关系有什么共同点？

归纳以上三个实例，我们看到，三个实例中变量之间的关系都可以描述为：对于数集 A 中的每一个 x ，按照某种对应关系 f ，在数集 B 中都有唯一确定的 y 和它对应，记作

$$f: A \rightarrow B.$$

一般地，我们有：

设 A, B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数(function)，记作

$$y = f(x), x \in A.$$

其中， x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域(domain)；

与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域(range)。显然，值域是集合 B 的子集。

我们所熟悉的一次函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 的定义域是 \mathbf{R} ，值域也是 \mathbf{R} 。对于 \mathbf{R} 中的任意一个数 x ，在 \mathbf{R} 中都有唯一的数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 和它对应。

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的定义域是 \mathbf{R} ，值域是 B 。当 $a > 0$ 时， $B = \{y | y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}\}$ ；当 $a < 0$ 时， $B = \{y | y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}\}$ 。对于 \mathbf{R} 中的任意一个数 x ，在 B 中都有唯一的数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 和它对应。

① 恩格尔系数
= $\frac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}}$

函数符号 $y = f(x)$ 是由德国数学家莱布尼兹在 18 世纪引入的。



反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的定义域、对应关系和值域各是什么? 请用上面的函数定义描述这个函数.

研究函数时常会用到区间的概念.

设 a, b 是两个实数, 而且 $a < b$. 我们规定:

- (1) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 表示为 $[a, b]$;
- (2) 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 表示为 (a, b) ;
- (3) 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间, 分别表示为 $[a, b)$, $(a, b]$.

这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点.

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x a \leq x < b\}$	半开半闭区间	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	半开半闭区间	$(a, b]$	

这些区间的几何表示如上表所示. 在图中, 用实心点表示包括在区间内的端点, 用空心点表示不包括在区间内的端点.

实数集 \mathbf{R} 可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$, “ ∞ ”读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”. 我们可以把满足 $x \geq a$, $x > a$, $x \leq b$, $x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

例 1 已知函数 $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x+2}$,

- (1) 求函数的定义域;
- (2) 求 $f(-3)$, $f(\frac{2}{3})$ 的值;
- (3) 当 $a > 0$ 时, 求 $f(a)$, $f(a-1)$ 的值.

分析: 函数的定义域通常由问题的实际背景确定, 如前所述的三个实例. 如果只给出解析式 $y=f(x)$, 而没有指明它的定义域, 那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

解: (1) 使根式 $\sqrt{x+3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x|x \geq -3\}$, 使分式 $\frac{1}{x+2}$ 有意义的实

数 x 的集合是 $\{x|x \neq -2\}$. 所以, 这个函数的定义域就是

$$\begin{aligned} & \{x|x \geq -3\} \cap \{x|x \neq -2\} \\ & = \{x|x \geq -3, \text{ 且 } x \neq -2\}. \end{aligned}$$

$$(2) f(-3) = \sqrt{-3+3} + \frac{1}{-3+2} = -1;$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}+3} + \frac{1}{\frac{2}{3}+2} = \sqrt{\frac{11}{3}} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

(3) 因为 $a > 0$, 所以 $f(a)$, $f(a-1)$ 有意义.

$$f(a) = \sqrt{a+3} + \frac{1}{a+2};$$

$$f(a-1) = \sqrt{a-1+3} + \frac{1}{(a-1)+2} = \sqrt{a+2} + \frac{1}{a+1}.$$

在函数定义中, 我们用符号 $y=f(x)$ 表示函数. 其中 $f(x)$ 表示 x 对应的函数值, 而不是 f 乘 x .

由函数的定义可知, 一个函数的构成要素为: 定义域、对应关系和值域. 由于值域是由定义域和对应关系决定的, 所以, 如果两个函数的定义域相同, 并且对应关系完全一致, 我们就称这两个函数相等.

例 2 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 相等?

$$(1) y=(\sqrt{x})^2; \quad (2) y=\sqrt[3]{x^3};$$

$$(3) y=\sqrt{x^2}; \quad (4) y=\frac{x^2}{x}.$$

解: (1) $y=(\sqrt{x})^2=x (x \geq 0)$, 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 虽然对应关系相同, 但是定义域不相同. 所以, 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 不相等.

(2) $y=\sqrt[3]{x^3}=x (x \in \mathbf{R})$, 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 不仅对应关系相同, 而且定义域也相同. 所以, 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 相等.

(3) $y=\sqrt{x^2}=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 的定义域都是实数集 \mathbf{R} , 但是当 $x < 0$ 时, 它的对应关系与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 不相同. 所以, 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 不相等.

(4) $y=\frac{x^2}{x}$ 的定义域是 $\{x|x \neq 0\}$, 与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 的对应关系相同但定义域不相同. 所以, 这个函数与函数 $y=x (x \in \mathbf{R})$ 不相等.

你也可以利用计算器或计算机画出例 2 中四个函数的图象, 根据图象进行判断.



至此，我们在初中学习的基础上，运用集合和对应的语言刻画了函数概念，并引进了符号 $y=f(x)$ ，明确了函数的构成要素，比较两个函数定义，你对函数有什么新的认识？

练习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \frac{1}{4x+7}$; (2) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} - 1$.

2. 已知函数 $f(x) = 3x^2 + 2x$,

(1) 求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(2)+f(-2)$ 的值;

(2) 求 $f(a)$, $f(-a)$, $f(a)+f(-a)$ 的值.

3. 判断下列各组中的函数是否相等，并说明理由：

(1) 表示炮弹飞行高度 h 与时间 t 关系的函数 $h = 130t - 5t^2$ 和二次函数 $y = 130x - 5x^2$;

(2) $f(x) = 1$ 和 $g(x) = x^0$.

1.2.2 函数的表示法

我们在初中已经接触过函数的三种表示法：解析法、图象法和列表法.

解析法，就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系，如 1.2.1 的实例 (1).

图象法，就是用图象表示两个变量之间的对应关系，如 1.2.1 的实例 (2).

列表法，就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系，如 1.2.1 的实例 (3).

例 3 某种笔记本的单价是 5 元，买 x ($x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) 个笔记本需要 y 元.

试用函数的三种表示法表示函数 $y=f(x)$.

解：这个函数的定义域是数集 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

用解析法可将函数 $y=f(x)$ 表示为

$$y = 5x, x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

用列表法可将函数 $y=f(x)$ 表示为

笔记本数 x	1	2	3	4	5
钱数 y	5	10	15	20	25

用图象法可将函数 $y=f(x)$ 表示为图 1.2-2.